

算法基础

第一次作业 (DDL: 2025 年 10 月 5 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. ($5 \times 2 = 10$ 分) 判断以下命题的正误。若正确, 请给出证明; 若错误, 请给出反例。

1. 若 $f(n) = \Theta(g(n))$, 则有 $\lg(f(n)) = \Theta(\lg g(n))$ 。
2. 若 $f(n) = \sum_i^l b_i n^i$, 且 $b_l > 0$, 则有 $f(n) = \Theta(n^l)$ 。

Q2. ($15 + 15 + 10 = 40$ 分) 函数 $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ 在一些算法的时间复杂度分析中具有重要应用, 其定义如下:

$$\begin{cases} A(0, n) = n + 1 & , \text{对于 } n \geq 0 \\ A(m + 1, 0) = A(m, 1) & , \text{对于 } m \geq 0 \\ A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)) & , \text{对于 } m, n \geq 0 \end{cases}$$

(1) 证明 A 是良定义的, 即对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $A(m, n)$ 的递归定义总能终止。

(2) 证明 $A(m, n)$ 关于 m, n 分别单调递增, 即:

$$A(m + 1, n) > A(m, n)$$

$$A(m, n + 1) > A(m, n)$$

(3) $\alpha(x)$ 定义为使得 $A(n, n) \leq x$ 的最大自然数 n 。证明:

$$\alpha(x) = \omega(1)$$

$$\alpha(x) = O(\lg^* x)$$

其中 $\lg^* x$ 为迭代对数函数。

Q3. ($3 \times 5 = 15$ 分) 假设你有以下列出的五种运行时间的算法。(假设这些是作为输入大小 n 函数执行的确切操作次数。) 假设你有一台计算机, 每秒可以执行 10^{10} 次操作, 你需要在最多一个小时的计算时间内得到结果。对于每种算法, 你能在一小时内得到结果的最大输入大小 n 是多少?

1. n^4
2. $100n^2$

3. $n \log n$

4. 2^n

5. 2^{2^n}

Q4. (15 + 20 = 35 分) 中秋佳节即将到来，科大糕点厂决定给 n 个科大幼儿园的小朋友分发科大定制月饼。小朋友们排成一队依次领取，从队头数起第 i ($1 \leq i \leq n$) 个小朋友有 a_i 朵小红花，分到 c_i 枚月饼。同时，为了奖励小红花多的小朋友，幼儿园园长制定了以下分发规则：

- 每个小朋友至少分到 1 枚月饼 ($c_i \geq 1$);
- 若小朋友的小红花数多于相邻的小朋友的小红花数，则其分到的月饼数也多于相邻的小朋友 ($a_i > a_j$ ($1 \leq i, j \leq n, |i - j| = 1$) $\Rightarrow c_i > c_j$);

1. 若 $n = 5$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 2$, 请给出一个满足以上规则的月饼分配方案。
2. 现在 n, a_i 已知, 请设计满足以上规则的分发方案 (算法), 输出每个小朋友分到的月饼数 c_i , 同时使得 $\sum_{i=1}^n c_i$ 最小。给出该算法的伪代码。(不需要证明算法的最优性)