

算法基础

第二次作业 (DDL: 2025 年 10 月 26 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. ($4 \times 5' + 10' = 30$ 分)对于下列递归式, 给出 $T(n)$ 的渐进紧确界:

1. $T(n) = 3T(n/2) + 6n$,
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^3 + 5n^2$,
3. $T(n) = 9T(n/3) + n^2 \log n$,
4. $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$,
5. $T(n) = 2T(n/4) + 3T(n/6) + n \log n$.

Q2. (15 分)

对于递归式 $T(n) = T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lceil 7n/10 \rceil + 6) + \Theta(n)$, 请判断 $T(n) = \Theta(n \log n)$ 是否正确? 并给出证明。

Q3. (20 分)

归并排序算法如下，试改进归并排序算法，计算逆序对数目（存在正整数 i, j 使得 $1 \leq i < j \leq n$ 而且 $A[i] > A[j]$ ，则 $(A[i], A[j])$ 称为 A 的一个逆序对）。需要给出正确性的证明。

Algorithm 1: Merge Sort algorithm

```

1 function MERGE( $p, j, k$ )
2    $n_1 \leftarrow j - p, n_2 \leftarrow k - j + 1$ ;
3   Let  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  be new arrays to avoid shift;
4   for  $i \leftarrow 1$  to  $n_1$  do
5      $L[i] \leftarrow A[p + i - 1]$ ;
6   for  $i \leftarrow 1$  to  $n_2$  do
7      $R[i] \leftarrow A[j + i - 1]$ ;
8    $L[n_1 + 1] \leftarrow \infty$ ;
9    $R[n_2 + 1] \leftarrow \infty$ ;
10   $i_l \leftarrow 1, i_r \leftarrow 1$ ;
11  for  $i \leftarrow p$  to  $k$  do
12    if  $L[i_l] \leq R[i_r]$  then
13       $A[i] \leftarrow L[i_l]$ ;
14       $i_l \leftarrow i_l + 1$ ;
15    else
16       $A[i] \leftarrow R[i_r]$ ;
17       $i_r \leftarrow i_r + 1$ ;

18 function SORT( $p, r$ )
19   if  $p < r$  then
20      $q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ ;
21     SORT( $p, q$ );
22     SORT( $q + 1, r$ );
23     MERGE( $p, q + 1, r$ );

```

Q4. (15 分)

试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数 $0 < \alpha \leq 1/2$, **Partition** 产生比 $1 - \alpha : \alpha$ 更平衡的划分的概率约为 $1 - 2\alpha$.

Partition 的实现如下 (与课件一致):

Algorithm 2: Partition

```

1 function PARTITION( $A, p, r$ )
2    $x = A[r]$ ;
3    $i = p - 1$ ;
4   for  $j = p$  to  $r - 1$  do
5     if  $A[j] \leq x$  then
6        $i = i + 1$ ;
7        $A[i] \leftrightarrow A[j]$ ;
8    $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ ;
9   return  $i + 1$ ;
```

Q5. (20 分)

在计算机系统中浮点运算会出现误差, 所以小明决定采用分数来存储浮点数。具体来说, 一共有 n 个数字, 小明将每个数字写成 a_i/b_i 的形式, 满足 $1 \leq a, b \leq n^3, a, b \in \mathbb{N}^+$ 。现在请你设计一个 $O(n)$ 的算法, 帮助小明对 n 个这样的分数进行排序。

提示: 注意 a 和 b 的数据范围。