

### 算法基础

第二次作业 (DDL: 2025 年 10 月 26 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

**Q1.**( $4 \times 5' + 10' = 30$  分)

对于下列递归式，给出  $T(n)$  的渐进紧确界：

1.  $T(n) = 3T(n/2) + 6n,$
2.  $T(n) = 8T(n/2) + n^3 + 5n^2,$
3.  $T(n) = 9T(n/3) + n^2 \log n,$
4.  $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n,$
5.  $T(n) = 2T(n/4) + 3T(n/6) + n \log n.$

**Q2.** (15 分)

对于递归式  $T(n) = T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lceil 7n/10 \rceil + 6) + \Theta(n)$ , 请判断  $T(n) = \Theta(n \log n)$  是否正确？并给出证明。

**Q3.** (20 分)

归并排序算法如下，试改进归并排序算法，计算逆序对数目（存在正整数  $i, j$  使得  $1 \leq i < j \leq n$  而且  $A[i] > A[j]$ ，则  $(A[i], A[j])$  称为  $A$  的一个逆序对）。需要给出正确性的证明。

---

**Algorithm 1:** Merge Sort algorithm

---

```

1 function MERGE( $p, j, k$ )
2      $n_1 \leftarrow j - p, n_2 \leftarrow k - j + 1;$ 
3     Let  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  be new arrays to avoid shift;
4     for  $i \leftarrow 1$  to  $n_1$  do
5          $L[i] \leftarrow A[p + i - 1];$ 
6         for  $i \leftarrow 1$  to  $n_2$  do
7              $R[i] \leftarrow A[j + i - 1];$ 
8              $L[n_1 + 1] \leftarrow \infty;$ 
9              $R[n_2 + 1] \leftarrow \infty;$ 
10             $i_l \leftarrow 1, i_r \leftarrow 1;$ 
11            for  $i \leftarrow p$  to  $k$  do
12                if  $L[i_l] \leq R[i_r]$  then
13                     $A[i] \leftarrow L[i_l];$ 
14                     $i_l \leftarrow i_l + 1;$ 
15                else
16                     $A[i] \leftarrow R[i_r];$ 
17                     $i_r \leftarrow i_r + 1;$ 
18 function SORT( $p, r$ )
19    if  $p < r$  then
20         $q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor;$ 
21        SORT( $p, q$ );
22        SORT( $q + 1, r$ );
23        MERGE( $p, q + 1, r$ );

```

---

**Q4.** (15 分)

试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数  $0 < \alpha \leq 1/2$ , **Partition** 产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡的划分的概率约为  $1 - 2\alpha$ .

**Partition** 的实现如下 (与课件一致):

---

**Algorithm 2:** Partition

---

```

1 function PARTITION( $A, p, r$ )
2    $x = A[r];$ 
3    $i = p - 1;$ 
4   for  $j = p$  to  $r - 1$  do
5     if  $A[j] \leq x$  then
6        $i = i + 1;$ 
7        $A[i] \leftrightarrow A[j];$ 
8      $A[i + 1] \leftrightarrow A[r];$ 
9   return  $i + 1;$ 
```

---

**Q5.** (20 分)

在计算机系统中浮点运算会出现误差, 所以小明决定采用分数来存储浮点数。具体来说, 一共有  $n$  个数字, 小明将每个数字写成  $a_i/b_i$  的形式, 满足  $1 \leq a, b \leq n^3, a, b \in \mathbb{N}^+$ 。现在请你设计一个  $O(n)$  的算法, 帮助小明对  $n$  个这样的分数进行排序。

提示: 注意  $a$  和  $b$  的数据范围。