

算法基础

第三次作业 (DDL: 2025 年 11 月 2 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (5 + 10 = 15 分)

(a) 下面的排序算法中哪些是稳定的：插入排序、冒泡排序、希尔排序、堆排序和快速排序？

(b) 给出一个能使任何排序算法都稳定的方法。你所给出的方法带来的额外时间和空间开销是多少？

Q2. (15 分) Quicksort 包含了两个对自身的递归调用：

```

1 Quicksort(A, p, r)
2   if p < r then
3       q = Partition(A, p, r)
4       Quicksort(A, p, q - 1)
5       Quicksort(A, q + 1, r)

```

其中第二个递归调用并非必须的。请修改 Quicksort，使得 Quicksort 只包含一个递归调用。（提示：使用一个循环结构来代替其中一个递归调用）

Q3. (20 分) 因为在基于比较的排序模型中，完成 n 个元素的排序，其最坏情况下需要 $\Omega(n \log n)$ 时间。试证明：任何基于比较的算法从 n 个元素的任意序列中构造一棵二叉搜索树，其最坏情况下需要 $\Omega(n \log n)$ 的时间。**Q4.** (20 分) 定义二叉搜索树 T 上节点的深度 $d(x)$ 如下：

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x = \text{root}(T) \\ d(p(x)) + 1, & \text{else} \end{cases}$$

试证明：以随机的输入构建的二叉搜索树的平均节点深度的期望为 $\Theta(\log(n))$ 。**Q5.** (10 + 10 = 20 分) 红黑树：

(a) 将关键字 41, 38, 31, 12, 19, 8 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后，请画出该结果树。

(b) 对于 (a) 中得到的红黑树，依次删除 8, 12, 19, 31, 38, 41，请画出每次删除操作后的红黑树。

Q6.(10 分) 在一棵黑高为 k 的红黑树中，内部结点（带关键字的结点）最多可能有多少个？最少可能有多少个？说明理由。