

算法基础

第四次作业 (DDL: 2025 年 11 月 23 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (10 + 10 = 20 分)

对于图一所给的斐波那契堆，黑色节点表示结点的 mark 属性为 true：

- 1) 抽取最小结点 (需要考虑 CONSOLIDATE 操作)，画出每次操作之后的结果。
- 2) 分析该操作的摊还代价。

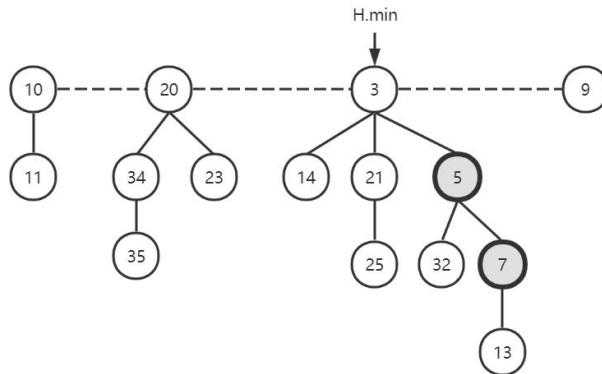


图 1: 斐波那契堆

Q2. (20 分)

假设斐波那契堆中的一个根节点 x 是被标记的。请说明 x 是如何成为一个被标记的根节点的。

Q3. (15 + 15 = 30 分) 斐波那契堆删除操作的另一种实现：

Pisano 教授提出了下面的 FIB-HEAP-DELETE 过程的一个变种，声称如果删除的结点不是由 $H.\min$ 指向的结点，那么该程序运行地更快。

- (a) 该教授的声称是基于第 10 行可以在 $O(1)$ 实际时间完成的这一假设，它的程序可以运行的更快。该假设有什么问题吗？
- (b) 当 x 不是由 $H.\min$ 指向时，给出 PISANO-DELETE 实际时间的一个好（紧凑）上界。你给出的上界应该以 $x.degree$ 和调用 CASCADING-CUT 的次数 c 这两个参数来表示。

Algorithm 1: PISANO-DELETE(H, x)

Input : A Fibonacci heap H , a node x

Output: Heap H after deleting node x

```

1 if  $x == H.\min$  then
2   | FIB-HEAP-EXTRACT-MIN( $H$ );
3 end
4 else
5   |  $y \leftarrow x.p$ ;
6   | if  $y \neq NIL$  then
7     |   | Cut( $H, x, y$ );
8     |   | Cascading-Cut( $H, y$ );
9   end
10  | Add  $x$ 's child list to the root list of  $H$ ;
11  | Remove  $x$  from the root list of  $H$ ;
12 end

```

Q4. (30 分)

为了在算法基础课程期中考试中取得好成绩，小花同学在考前狂刷《算法导论》课后习题。在不刷任何题的情况下，小花能够考 S 分。《算法导论》中共有 n 道题，刷第 i 题能使她的期中考试成绩提升 s_i ($s_i \geq 0$)。但与此同时，刷题会产生疲劳，进而影响考试发挥，如果小花一共刷了 k 道题，则她会因为疲劳而损失 αk 分 ($\alpha \geq 0$)。小花不喜欢跳着刷题，也不喜欢倒着刷题，更不喜欢重复刷题，因此她只会从某一题开始刷连续的若干题。假设小花希望让自己的最终分数落入 $[l, r]$ ，请问她有多少种刷题方案？试设计一个具有 $O(n \lg n)$ 最坏时间复杂度的算法解决该问题。（在小花所处的平行世界中，考试的分数未必是 $0 \sim 100$ 的整数，因此你不能使用计数排序等对数据范围有限制的方法）