算法基础

第五次作业（DDL：2025 年 11 月 30 日 23:59）

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1.（$2 \times 10' = 20$ 分）

(a) 对矩阵规模序列 $(5, 10, 3, 12, 5, 50, 6)$，求矩阵链最优括号化方案。(给出计算过程)

(b) 证明：对 n 个元素的表达式进行完全括号化，恰好需要 $n-1$ 对括号。

Q2.（20 分）给定 k 个相同的鹰蛋与一栋高 n 层的楼房。鹰蛋满足这样的规律：存在一个楼层高度 $i \geq 0$，当从小于等于 i 的楼层扔下时，鹰蛋不会摔碎，而若扔下高度大于 i，鹰蛋则会摔碎。这样的 i 称为耐久值。你需要利用 n 层的楼房测出鹰蛋的耐久值，如果鹰蛋从第 n 层楼摔下都不会摔碎，可以认为耐久值为 n。

你可以进行若干次实验，每次实验中选择一枚完好的鹰蛋从某一高度落下。即，如果在一次实验后鹰蛋没有摔碎，则该鹰蛋可正常用于后续实验，否则该鹰蛋之后不可再用。

你需要最小化在最坏情况下的实验次数。设计动态规划算法求出该最小值，并尽可能地优化时间复杂度。为获得本题的全部分数，你需要将时间复杂度优化至 $o(n)$。(请注意此处是小 o)

以下是两个样例：

- $n = 100, k = 1$。需要将鹰蛋依次从 1 到 100 层摔下，不可间断（否则唯一的鹰蛋摔碎后就无法确定具体的耐久值）。最小实验次数为 100。
- $n = 6, k = 2$。第一次从第 3 层摔下。若鹰蛋摔碎，则耐久值小于 3，用剩下的鹰蛋依次从第 1、2 层摔下即可确定耐久值；否则，由于两个鹰蛋均完好，直接在剩余楼层中二分求解，即先测试第 5 层，若摔碎则测试第 4 层，否则测试第 6 层。最小实验次数为 3。

Hint 1. 为了优化时间复杂度，可以转变思路，探寻 k 个鹰蛋进行 m 次实验最多可以确定多少层楼。

Q3.（20 分）我们想要找到整数数组 $nums$ 中（数字的值域是 $[1, n]$，n 也是数组长度）满足以下要求的最长递增子序列：

1. 子序列严格递增
2. 子序列中相邻元素的差值不超过 k

请给出一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 时间的算法，找出满足上述要求的最长子序列。
(感兴趣的同学可以尝试给出一个时间复杂度为 $O(n\log n)$ 的算法)

Q4. (20 分) 叠叠乐
(a) 在一次图书漂流活动中，小明需要将收集到的旧书叠起来以充分利用存储室的空间。为了保证叠起来的书保持稳定，要求上层书的尺寸（长宽分别为 $p \times q$）必须严格小于下层书的尺寸（长宽分别为 $r \times s$），即 $p < r$ 且 $q < s$。此外，为了便于统计书名和书的数量，所有书的书脊必须朝向同一面（即书的长宽不能调换）。现在已知有 n 本旧书，它们的长宽分别为 $a_i \times b_i (1 \le i \le n,\ a_i > b_i)$，试设计最坏时间复杂度尽可能优的算法求这些书最多可能叠多少层。
(b) 积木同样可以堆叠。不过，积木的尺寸有三个维度，分别是长、宽、高。每块积木都能够以任意方向进行堆叠（即可以选择任意一面作为底面，底面的长宽也可以调换）。为了保持稳定，要求上层积木的底面（尺寸为 $p \times q$）必须严格小于下层积木的顶面（尺寸为 $r \times s$），即 $p < r$ 且 $q < s$，或 $p < s$ 且 $q < r$。现在已知有 n 种尺寸各异的积木（尺寸为 $a_i \times b_i \times c_i (1 \le i \le n)$），每种尺寸的积木至少有三块，试设计最坏时间复杂度为 $O(n^2)$ 的算法求这些积木最多可能叠多高。

Q5. $(2 \times 10' = 20$ 分$)$
给定一个整数数组 $A[1:n]$, 找到一个具有最大和的连续子数组 (子数组最少包含一个元素), 比如数组 $[-1, 7, -2, 3]$ 的一个具有最大和的连续子数组为 $[7, -2, 3]$.
(a) 用动态规划的方法在 $O(n)$ 时间内求解该问题, 根据你的思路列出你用到的边界条件和状态转移方程。
(b) 我们将一维的整数数组扩展到二维的矩阵, 试用动态规划的方法找到整数矩阵 $M[1:n, 1:n]$ 中具有最大和的子矩阵。简要说明你的算法并给出时

间复杂度。为获得本题的全部分数，你需要将算法优化至 $O(n^3)$。

Hint 2. 为了优化时间复杂度，可以考虑使用前缀和。