

算法基础

第六次作业 (DDL: 2025 年 12 月 7 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (20 分)

对于用最少的硬币找 n 美分零钱的问题, 假定有 25 美分、10 美分、5 美分、2 美分和 1 美分五种面额的硬币: 设计贪心算法求解找零问题, **给出算法思路**, 并证明你的**贪心算法的正确性**, 不必给出伪代码。

Q2. (20 分)

给定一个非负整数数组 $A[1:n]$, 每次可以选择一个满足:

$1 \leq l \leq r \leq n, \min(a_l, a_{l+1}, \dots, a_r) > 0$ 的区间 $[l, r]$ 进行一次操作, 使得 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 减 1。比如, $n = 5, A[1:5] = [1, 2, 3, 4, 5]$, 先后选择 $[1, 5], [2, 4]$ 执行操作后, A 数组变成 $[0, 0, 1, 2, 4]$ 。下一次操作便不可以选择 $l = 1, 2$ 。

问最少需要多少次操作, 使得 A 数组变为全 0 数组。请设计一个时间复杂度 $O(n)$ 的算法求解该问题, **给出伪代码和算法思路、复杂度说明**, 并**证明算法的正确性**。

Q3. (20 分)

中国科学技术大学某神秘实验室正在研究一种名为“软性晶体”的新型材料。现在有 n 块晶体需要从上到下垂直堆叠在一起进行高压测试。其中, 第 i 块晶体有三个参数: 自身重量 w_i , 初始体积 v_i , 压缩系数 c_i 。**所有数字均为正数**。

由于材料较软, 第 i 块晶体会被其**上方**所有晶体的总重量压缩。具体来说, 如果第 i 块晶体上方所有晶体的重量之和为 W , 那么该晶体的实际体积将变为:

$$V_{\text{real}} = v_i - c_i \times W$$

保证 $0 < c_i \leq \frac{v_i}{\sum w_i}$, 也就是说晶体的体积不会被压成负数。

整个堆叠体的**总体积**是所有晶体实际体积之和。作为实验负责人, 你需要设计一个算法决定这 n 块晶体的**堆叠顺序** (从上到下), 使得最终的总体积最小。**请提供思路以及正确性证明, 不需要伪代码**。你的算法的时间复杂度不能超过 $O(n \log n)$, 超出会酌情扣分。

Hint 1. 可以考虑交换邻项法。

Q4. (20 分) 有一本词典，其中有 n 种单词，各个单词的出现次数分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。推广赫夫曼算法，使之能生成三进制的码字（即码字由符号 0、1、2 组成），并**证明你的算法能生成最优三进制码**。不需要提供伪代码。

Q5. (20 分)

中国科学技术大学物流中心每天会收到大量的紧急运输订单。今天，中心共收到了 n 个运输订单。每个订单 i 都有两个关键属性：

- **截止时间 t_i** ：该订单必须在时刻 t_i 或之前完成（假设时间从 1 开始，每个时刻是一个整数）。
- **收益 w_i** ：完成该订单可获得的利润。

由于物流飞船的运力限制，中心**每个单位时间只能完成 1 个订单**。此外，由于燃料和维护的限制，物流中心今天**总共最多只能完成 k 个订单**。

作为首席调度官，你需要制定一个调度方案，在满足所有时间限制和总数限制的前提下，使得获得的总收益最大化。**你的算法只需要返回最终的总收益，给出算法思路以及伪代码**。为了获得满分，你的算法时间复杂度不能超过 $O(n \log n)$ 。超出会酌情扣分。

Hint 2. 可以先考虑找出一个正确的调度策略，再使用我们学过的数据结构进行优化。