

算法基础

第七次作业 (DDL: 2025 年 12 月 28 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1. (10 + 15 = 25 分)

给定三组整数列表 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$, 判断是否存在 i, j, k 使得 $a_i + b_j + c_k = 0$, 若存在, 请给出一组解。

1. 设计一个最坏时间复杂度尽可能优的算法解决题干中问题。
2. 假设列表中所有元素都在 $[-M, M]$ 的范围内 ($M > n$)。设计一个最坏时间复杂度为 $O(M \log M)$ 的算法解决题干中问题。
提示: 第二问可能需要使用快速多项式乘法。

Q2. (15 分)

在一个包含 n 个元素的数组 A 中, $A[1] \neq A[n]$ 。我们希望找到一个索引 i , 使 $A[i]$ 与 $A[i+1]$ 不相等。请考虑分治法, 设计时间复杂度不超过 $O(\log(n))$ 的算法解决该问题。给出伪代码, 并分析其运行时间。

Q3. (10 + 10 + 10 = 30 分)

1. 假定我们对一个数据结构执行一个由 n 个操作组成的操作序列, 当 i 严格为 2 的幂时, 第 i 个操作的代价为 i , 否则代价为 1。使用聚合分析确定每个操作的摊还代价。
2. 用核算法重做第一问。
3. 使用势能法重做第一问。

Q4. (15 + 15 = 30 分)

虽然小牛做算法基础的作业题时常感到力不从心, 但幸运的是, 他有一群很友善的同学可以请教。由于同学们都有各自的事情要忙, 只能简单告诉 ta 是否做对 (是或者否)。提交了几次作业后, 小牛发现有的同学判断相比其他同学会更准确。无疑, 小牛想要寻找最能够帮助到 ta 的同学。可惜的是, 他无法预先知道谁对他的帮助最大。为此, 他考虑了这样一种策略: 每做一道练习题, 便去询问所有候选同学, 采取“多数权重”的意见:

1. 初始时, 每个候选同学的权重均为 1;
2. 每次询问完后, 采纳总权重更大的意见 (是或者否);

3. 在发现自己做的练习题是否正确后，将进行错误判断同学的权重减半。

(a) 请你告诉小牛使用上述策略至多会判断 $\frac{1}{2-\log_2 3}(m + \log_2 n)$ 次错，便可以知道哪位同学对他帮助最大。其中 n 是候选同学的数目， m 是对小牛帮助最大的同学会判断错的数目。

(b) 使用随机策略的话，小牛可以做的更好。我们修改上述策略如下：

1. 按概率采纳一位候选同学的意见，其中概率与候选同学的权重成正比；

2. 对判断错误的候选同学的权重乘上因子 $0 < \beta < 1$ 。

请证明若小牛采取这种随机策略，错误判断的期望数量至多为

$$\frac{m \ln 1/\beta + \ln n}{1 - \beta}$$