算法基础

第八次作业（DDL：2026 年 1 月 11 日 23:59）

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

Q1.（15 分）

在课程中我们讨论了用于计算有向无环图（DAG）的拓扑排序。在输入图确实是 DAG 的前提下，这个过程将最终生成一个拓扑排序。但是，假设我们给定的图是一个任意的有向图。请扩展拓扑排序算法，使得在给定一个输入有向图 G 时，它输出以下两种情况之一：(a) 一个拓扑排序，从而确定 G 是一个 DAG；或 (b) G 中的一个环，从而确定 G 不是一个 DAG。你的算法的运行时间应为 $O(m+n)$，其中 n 表示图中的节点数，m 表示图中的边数。

Q2.（15 分）

假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$ 内。在此种情况下，Kruskal 算法最快能多快？如果边权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢？

Q3.（15 分）

修改 Bellman-Ford 算法，使其对于所有结点 v 来说，如果从源节点 s 到结点 v 的一条路径上存在权重为负值的环路，则将 $v.d$ 的值设置为 $-\infty$。

Solution: Bellman-Ford 在标准实现中执行 $|V|-1$ 次松弛操作，能够找到从源结点 s 到所有顶点的最短路径。如果图中存在从 s 可达的负权环，则在执行 $|V|$ 次松弛操作时，这些环上的结点的 $v.d$ 值仍会减少。而若不存在负权环，执行 line1 - line4 后 $v.d$ 不会再减小。所以只需将 line7 替换为 $v.d = -\infty$。

Q4. $(10 + 15 = 25$ 分)

对于一个带权有向图 $G =< V, E >$，当图中没有负边时，Dijkstra 算法能够解决单源最短路径搜索问题。1）请分析并举例说明 Dijkstra 算法当图中存在负边时可能出现错误的原因。

2）请在 Dijkstra 算法的基础上进行改进，使改进后的算法满足：只要图中不存在负边环，算法可以正确搜索有负边的带权有向图中单源最短路径。请给出改进算法的伪代码描述。

Q5.（$15 + 15 = 30$ 分）

下图是某个有向图的一个网络流，源节点为 A，汇点为 F，请根据 ford-fulkerson 方法求解下列问题：

1）给出该网络流的残存网络。

2）寻找增广路径，求出一个更大的流，重复这个过程，直到获得原始流网络的一个最大流。（画出每一步的残存网络和网络流图，标明增广路径）